Politechnika Łódzka
Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej

Imię Nazwisko
Nr albumu 1234567

PRACA DYPLOMOWA
magisterska / inżynierska / licencjacka
na kierunku ……………………

Temat pracy w języku prowadzenia studiów <Calibri 16>

Promotor: ……
(*tytuł/stopień naukowy, imię i nazwisko*)

Opiekun pomocniczy:*) ………………………………………………………………………………………………
(*tytuł/stopień naukowy, imię i nazwisko*)

Promotor uczelni partnerskiej:)** ……………………………………………………………………………
(*tytuł/stopień naukowy, imię i nazwisko*)

ŁÓDŹ <tylko rok>

*	jeśli został powołany
**	w przypadku procedury uznania

Spis treści

Streszczenie

Tekst streszczenia pracy dyplomowej.

Słowa kluczowe

Słowa kluczowe, słowa kluczowe, słowa kluczowe, słowa kluczowe.

Keywords

Słowa kluczowe w języku angielskim.

Wstęp

„We wstępie należy zarysować ogólne tło tematu pracy (badanego problemu, projektu), wskazać przesłanki wyboru tematu pracy, określić problematykę” (Z Zarządzenia Nr 75/2022 Rektora Politechniki Łódzkiej z 22 grudnia 2022 r., Załącznik nr 10).

Druga strona wstępu.

Trzecia strona wstępu.

Cel i zakres pracy

Zgodnie z Załącznikiem nr 10 do Regulaminu dyplomowania w Politechnice Łódzkiej do Zarządzenia Nr 75/2022 Rektora Politechniki Łódzkiej z 22 grudnia 2022 r. część główna pracy dyplomowej musi zawierać cel i zakres pracy. Należy przedstawić to co było oczekiwanym rezultatem prowadzonych badań oraz zaprezentować zakres pracy, badania, działania jakie trzeba było wykonać aby postawiony cel osiągnąć.

Cel i zakres pracy – druga strona (ewentualnie).

Rozdział 1

Preliminaria

1.1 Macierze dodatnie. Macierze nieujemne

Definicja 1.1. (Zob. np. [Kostrikin, 2012].) Niech $m, n \in \mathbb{N}$. **Macierzą** o m wierszach i n kolumnach o wyrazach z $\mathbb{R}$ nazywamy każdą funkcję

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}.$$

Zbiór macierzy o m wierszach i n kolumnach oznaczamy symbolem $L_m^n(\mathbb{R})$. Jeżeli dla każdych $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ liczba a_i^j jest wartością macierzy$A \in L_m^n(\mathbb{R})$ w punkcie (i, j), czyli $A(i, j) = a_i^j$, będziemy zapisywać $A = [a_i^j]$.

Definicja 1.2. (Zob. [Palczewski, 2004].) Niech $A = [a_i^j] \in L_n^n(\mathbb{R})$ i $x = [x_1, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$. Mówimy, że

- A jest macierzą dodatnią (nieujemną), jeżeli

$$\forall_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}\ a_i^j > 0 \quad (a_i^j \geqslant 0),$$

- x jest wektorem dodatnim (nieujemnym), jeżeli

$$\forall_{i=1,\ldots,n}\ x_i > 0 \quad (x_i \geqslant 0).$$

Definicja 1.3. (Zob. [Cauchy, 1840]) Niech $A \in L_n^n(\mathbb{R})$. **Wartością własną** macierzy A nazywamy każdą taką liczbę $\lambda \in \mathbb{C}$, że $\det(A - \lambda I_n) = 0$, gdzie I_n jest macierzą jednostkową o tym samym wymiarze, jaki ma macierz A.

Definicja 1.4. (Zob. [Kostrikin, 2012].) Niech $A \in L_n^n(\mathbb{R})$. Funkcję p_A zdefiniowaną wzorem

$$p_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

nazywamy **wielomianem charakterystycznym** macierzy A.

Definicja 1.5. (Zob.[Lang, 1987].) Niezerowy wektor $x \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **wektorem własnym** macierzy A, jeżeli istnieje taka liczba $\lambda \in \mathbb{R}$, że

$$Ax = \lambda x.$$

Mówimy wówczas, że jest λ **wartością własną macierzy** A **związaną z wektorem** x.

Twierdzenie 1.6. [Przeradzki, 1993] (Kryterium Routha-Hurwitza) *Rozważmy wielomian*

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

gdzie $a_n \neq 0$. Dla każdych $j < 0$ lub $j > n$ przyjmujemy $a_j = 0$. Definiujemy układ wyznaczników D_k, $k = 1, \ldots, n$, za pomocą wzorów

$$D_1 = \det[a_1], \qquad D_2 = \det\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}, \qquad D_3 = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix},$$

$$D_4 = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad D_n = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix}.$$

Części rzeczywiste wszystkich pierwiastków wielomianu p są ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $D_k > 0$ dla każdego $k \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $a_n > 0$.

Definicja 1.7. [Lang, 1987] Niezerowy wektor $x \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **wektorem własnym** macierzy A, jeżeli istnieje taka liczba $\lambda \in \mathbb{R}$, że

$$Ax = \lambda x.$$

Mówimy wówczas, że jest λ **wartością własną macierzy** A **związaną z wektorem** x.

Twierdzenie 1.8. [Przeradzki, 1993] (Kryterium Routha-Hurwitza) *Rozważmy wielomian*

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

gdzie $a_n \neq 0$. Dla każdych $j < 0$ lub $j > n$ przyjmujemy $a_j = 0$. Definiujemy układ *wyznaczników D_k, $k = 1, \dots, n$, za pomocą wzorów*

$$D_1 = a_1, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

Części rzeczywiste wszystkich pierwiastków wielomianu p są ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $D_k > 0$ dla każdego $k \in \{1, \dots, n\}$ oraz $a_n > 0$.

Definicja 1.9. (Zob. np. [Lang, 1987]) Niezerowy wektor $x \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **wektorem własnym** macierzy A, jeżeli istnieje taka liczba $\lambda \in \mathbb{R}$, że

$$Ax = \lambda x.$$

Mówimy wówczas, że jest λ **wartością własną macierzy A związaną z wektorem** x.

Twierdzenie 1.10. [Przeradzki, 1993] (Kryterium Routha-Hurwitza) *Rozważmy wielomian*

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

gdzie $a_n \neq 0$. Dla każdych $j < 0$ lub $j > n$ przyjmujemy $a_j = 0$. Definiujemy układ wyznaczników D_k, $k = 1, \dots, n$, za pomocą wzorów

$$D_1 = \det[a_1], \qquad D_2 = \det\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}, \qquad D_3 = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix},$$

$$D_4 = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad D_n = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix}.$$

Części rzeczywiste wszystkich pierwiastków wielomianu p są ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $D_k > 0$ dla każdego $k \in \{1, \dots, n\}$ oraz $a_n > 0$.

Uwaga 1.11. Wyznaczniki w treści (ostatniego) twierdzenia 1.10 zostały zapisane w otoczeniu `gather` (wymaga pakietu `amsmath`). Natomiast macierze zostały zapisane z wykorzystaniem `bmatrix`. Na przykład macierz

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

można otrzymać w środowisku LaTeX za pomocą kodu:

```
\begin{bmatrix}
5 & 8 \\
4 & 9
\end{bmatrix}
```

Inne instrukcje związane z macierzami: `matrix, pmatrix, vmatrix, Vmatrix` (cf. [Heck, 2005]).

Rozdział 2

Tytuł rozdziału drugiego

2.1 Równanie pierwszego rzędu

Niech $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym oraz $f : U \to \mathbb{R}^n$ funkcją ciągłą.

Definicja 2.1. Równanie postaci

$$x' = f(t, x) \tag{2.1}$$

nazywamy **równaniem pierwszego rzędu**.

Równanie (2.1), którego prawa strona nie zależy jawnie od zmiennej niezależnej nazywamy **równaniem autonomicznym**. Równanie to ma postać

$$x' = f(x). \tag{2.2}$$

Definicja 2.2. Warunek postaci

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.3}$$

ograniczający zbiór rozwiązań równania pierwszego rzędu (2.1) nazywa się **warunkiem początkowym**, przy czym $t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^n$ oraz $(t_0, x_0) \in U$.

Definicja 2.3. Równanie (2.1) uzupełnione warunkiem (2.3),

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.4}$$

nazywamy **zagadnieniem początkowym Cauchy'ego**.

Zauważmy, że, wobec przyjętych założeń, dla $x = (x_1, \ldots, x_n)$, równanie (2.1) jest układem równań różniczkowych rzędu pierwszego postaci

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ x_2' = f_2(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

2.2 Lokalny warunek Lipschitza

Niech $|\cdot|$ oznacza normę euklidesową w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, czyli

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$.

Definicja 2.4. (*Lokalny warunek Lipschitza.*) Niech $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Mówimy, że **funkcja** $f : U \to \mathbb{R}^n$ **spełnia lokalny warunek Lipschitza** lub **jest lokalnie lipschitzowsko ciągła względem drugiej zmiennej**, jeżeli dla każdego punktu $(\bar{t}, \bar{x}) \in U$ istnieje takie otoczenie V i stała $L > 0$, że dla dowolnych $(t, x_1), (t, x_2) \in V$ zachodzi nierówność

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|. \tag{2.5}$$

Lemat 2.5. *Niech $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym oraz niech $f : U \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją ciągłą. Funkcja φ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego* (2.4) *wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła i spełnia równania całkowe*

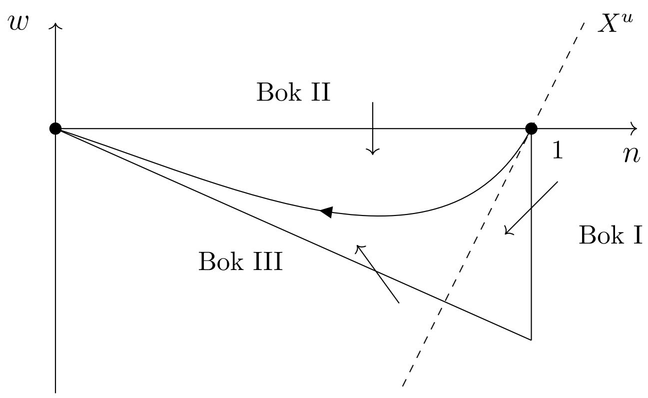
$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds. \tag{2.6}$$

2.3 Zapisywanie kodu źródłowego procedur

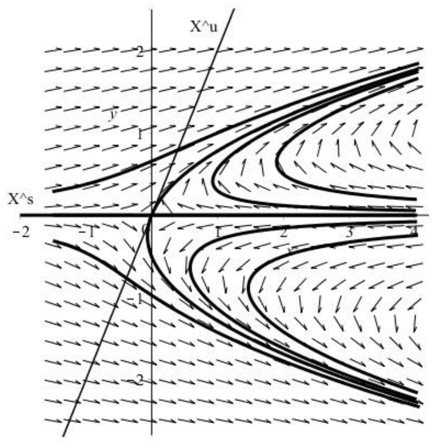
Kody źródłowe procedur lub funkcji zapisanych na przykład w systemie R lub Matlab można zapisać w systemie LaTeX wykorzystując środowisko `verbatim`. Na przykład:

```
function[wynik]=SumaKwadratow(N)
%Suma kwadratów liczb 1,2,...,N.

wynik=0;
odd=-1;
term=0;

for i=1:N
   odd=odd+2;
   term=term+odd;
   wynik=wynik+term;
endfor
endfunction
```

Ewentualnie można zastosować tekst maszynowy korzystając z polecenia `\texttt`.



Rys. 2.1: Zbiór dodatnio niezmienniczy modelu wraz z zaznaczoną orbitą heterokliniczną.



Rys. 2.2: Portret fazowy układu z zaznaczonymi podprzestrzeniami stycznymi X^s oraz X^u oraz rozmaitością stabilną i niestabilną.

2.4 Rysunki

Rysunek 2.1 pokazuje zbiór dodatnio niezmienniczy rozważanego modelu wraz z zaznaczoną orbitą heterokliniczną.

Wiele przykładów rysunków tworzonych z wykorzystaniem systemu LaTeX można odszukać na przykład w książce [Goossens, Rahtz, and Mittelbach, 1997].

2.5 Cytowania

Spis literatury wykorzystywanej w pracy jest obowiązkowym elementem. Spisie literatury umieszczamy tylko te pozycje, do których odnosimy się w pracy. W miejscu odniesienia się do umieszczamy symbol jakim oznaczona jest dana pozycja w spisie literatury.

Do poszczególnych pozycji ze spisu literatury odnosimy się za pomocą polecenia `\cite`.

Na przykład polecenie `\cite{Banasiak-Tchamga}` generuje w pliku pdf następujący symbol cytowania [Banasiak, Tchamga, 2017].

Zalecany jest jednolity styl typu autor–data odwoływania się do źródeł. Informacje na temat stylu typu autor–data są zamieszczone na stronach Biblioteki Politechniki Łódzkiej pod adresem

http://bg.p.lodz.pl/bibliografia-zalacznikowa

2.6 Tabele

Parametr	Wartość	Jednostka
r_1	0.514	$\frac{1}{\text{dni}}$
r_2	0.18	$\frac{1}{\text{dni}}$
K_1	$9.8039 \cdot 10^8$	komórki
K_2	10^9	komórki
δ	0.2	$\frac{\text{komórka}}{\text{dni}\cdot\text{pg/ml}}$
m	10^5	komórki
a	0.1	$\frac{1}{\text{dni}}$
r	$9.6 \cdot 10^3$	$\frac{\text{komórka}}{\text{dni}}$
k	$5 \cdot 10^{-11}$	$\frac{1}{\text{dzień komórki}}$
c_1	10^{-7}	$\frac{1}{\text{dzień komórki}}$
β	0.09	$\frac{\text{komórka}}{\text{dni}\cdot\text{pg/ml}}$
η	10^3	komórki
ν	10^{-3}	$\frac{1}{\text{liczba cząsteczek}}$
α	9	$\frac{\text{pg/ml}}{\text{dni}\cdot\text{komórka}^2}$
b	10^{-3}	$\frac{1}{\text{liczba cząsteczek}}$
μ	34	$\frac{1}{\text{dni}}$
c	5000	$\frac{\text{liczba cząsteczek}}{\text{dni}\cdot\text{komórki}}$
d	8.3178	$\frac{1}{\text{dni}}$
d_1	$1.1 \cdot 10^{-10}$	$\frac{\text{komórka}}{\text{dni}}$
d_2	$4.8 \cdot 10^{-10}$	$\frac{\text{komórka}}{\text{dni}}$

Tabela 2.1: Wartości parametrów modelu.

W tabeli 2.1 przedstawiono wartości parametrów omawianych w pracy.

2.6.1 Wyliczenia

Wyliczenia powinny mieć w stałej pracy taki sam styl (na przykład z użyciem kropek albo myślników). wyliczenia tworzywmy w środowisku `itemize`. Na przykład:

1. Tekst w punkcie pierwszym.

2. Tekst w punkcie drugim:
    - pierwszy podpunkt punktu drugiego,
    - drugi podpunkt punktu drugiego,
    - trzeci podpunkt punktu drugiego.
3. Tekst w punkcie trzecim:
    - pierwszy podpunkt punktu trzeciego,
    - drugi podpunkt punktu trzeciego.

Inny przykład z wykorzystaniem tylko numeracji:

1. Punkt pierwszy:
    (a) podpunkt pierwszy,
    (b) podpunkt drugi.
2. Punkt 2.
3. Punkt 3.
    (a) podpunkt pierwszy punktu trzeciego,
    (b) podpunkt drugi punktu trzeciego.
4. Punkt 4.

Można również zdefiniować własną numerację. Na przykład:

a_1. Punkt pierwszy.

a_2. Punkt drugi.

Podsumowanie

Część główna pracy powinna zawierać podsumowanie – zawierające syntezę wniosków opartą na udowodnionych przesłankach i podsumowanie wyników podjętego zagadnienia/rozpoznania badawczego.

Należy dodać informację o tym co dyplomant wykonał samodzielnie, jakie nowe rezultaty lub interpretacje zostały uzyskane.

Druga strona podsumowania.

Literatura

[Banasiak, Tchamga, 2017] Jacek Banasiak, M. S. Seuneu Tchamga (2017), *Delayed stability switches in singularly perturbed predator–prey models*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 35, 312–335. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2016.10.013

[Cauchy, 1840] Augustin-Louis Cauchy (1840), *Mémoire sur l'integration des équations linéaires*, Exercises d'analyse et de physique mathématique, 1, 53–100.

[Goossens, Rahtz, and Mittelbach, 1997] Michel Goossens, Sebastian Rahtz, Frank Mittelbach (1997), *The LaTeX Graphics Companion. Illustrating Documents with TeX and PostScript*, Addison Wesley Longman, Inc.

[Heck, 2005] André Heck (2005), *Learning LaTeX by Doing*. Course Notes, University of Amsterdam, 49 stron. https://staff.fnwi.uva.nl/a.j.p.heck/Courses/latexcourse.pdf (data dostępu: 11.04.2023).

[Lang, 1987] Serge Lang (1987), *Linear Algebra*, Nowy Jork, Springer.

[Kostrikin, 2012] Aleksiej I. Kostrikin (2012), *Wstęp do algebry. Algebra liniowa*, Warszawa, PWN.

[Palczewski, 2004] Andrzej Palczewski (2004), *Równania różniczkowe zwyczajne*, Wydanie 2, Warszawa, WNT.

[Przeradzki, 1993] Bogdan Przeradzki (1993), *Teoria i praktyka równań różniczkowych zwyczajnych*, Łódź, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.

Spis rysunków

Spis tabel

Spis symboli i oznaczeń

$X^{\mathbb{N}}$	Zbiór ciągów o wartościach w X
$L_m^n(\mathbb{R})$	Zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach o wartościach w pierścieniu liczb rzeczywistych

Skorowidz